NASA TECHNICAL MEMORANDUM NASA TM-77804

ALGORITHM FOR SPACE-TIME ANALYSIS OF DATA ON GEOMAGNETIC FIELD

N. V. Kulanin

(NASA-TM-77804) ALGORITHM FOR SPACE-TIME ANALYSIS OF DATA ON GEOMAGNETIC FIELD (National Aeronautics and Space Administration) 27 p HC A03/MF A01 CSCL 12A

N85-17609

Unclas

G3/64 13719

Translation of: "Algorithm prostranstvenno-Vremenno Analiza Dannykh o Geomagnitnam Pole," IN: "Algorithmy i rezult'taty obrabotki dannykh v MTsD," (Algorithms and Results of Data Interpretation in WDC), edited by V.P. Golovkov and Yu. S. Tyupkin, Soviet Geo-physical committee, USSR Academy of Sciences, Moscow, 1978, pp 1-5, 44-54

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON, D.C. 20546 NOVEMBER 1984

STANDARD TITLE PAGE

1. Report No.
NASA TM-77804

2. Government Accession No.

3. Recipient's Catalog No.

4. Title and Subtitle
ALGORITHM FOR SPACE-TIME ANALYSIS OF DATA ON GEOMAGNETIC FIELD

5. Report Date
NOVEMBER 1984

6. Performing Organization Code

7. Author(s)
N.V. Kulanin

8. Performing Organization Report No.

10. Work Unit No.

9. Performing Organization Name and Address
Leo kanner Associates
Redwood City, California 94063

11. Contract or Grant No.
NASW-4005

13. Type of Report and Period Covered
Translation

12. Sponsoring Agency Name and Address
National Aeronautics and Space Administration
Washington, D.C. 20546

14. Sponsoring Agency Code

15. Supplementary Notes
Translation of: "Algorithm prostranstvenno-Vremenno Analiza Dannykh o Geomagnitnam Pole, " IN: "Algorithy i rezult'taty obrabotki dannykh v MTsC,", (Algorithms and Results of Data Interpretation in WDC), edited by V.P. Golovkov andYu. S. Tyupkin, Soviet Geo-physical committee, USSR Academy of Sciences, Moscow, 1978, pp 1-5, 44-54

16. Abstract
The algorithm described, calculated for the execution of the space-time analysis of large volumes of diverse data quite arbitrarily distributed on the surface of the Earth and in time and realized in the form of a program for the BESM-6 computer, is now at the stage of completion of the verification of its applicability for analyzing a large part of the data contained in the Veynberg catalog with the involvement of some independent results pertaining both to epochs earlier than those contained in this catalog and later epochs, in the 20th century.

17. Key Words (Selected by Author(s))

18. Distribution Statement
Unclassified - Unlimited

19. Security Classif. (of this report)	20. Security Classif. (of this page)	21. No. of Pages	22. Price
Unclassified	Unclassified	18	

ALGORITHMS AND RESULTS OF DATA INTERPRETATION IN WDC

V.P. Golovkov and Yu.S. Tyupkin

Soviet Geophysical Committee

FOREWORD /5*

The broad use of computers in geophysics opened up two possibilities for researchers: construct complex theoretical models, on the one hand, and interpret large volumes of data, on the other. The first of these possibilities outpaced the other in realization because data reduction and data input into computers has thus far remained the bottleneck in the overall system, where the instrumentation has the design-wise obsolescent analog data output. This collection of articles contains the results of studies in both the methodological and interpretational areas in one way or another associated with the interpretation of large volumes of geophysical data of the most diverse specialization. Granted all the narrowness of the problems solved in each study, as a whole they illustrate to some extent the possibilities that appeared before researchers when both large volumes of data in machine-readable form and computers with sufficiently developed standard or specialized mathematical software were made available to them.

Naturally, these possibilities have surfaced first of all in the World Data Center; firstly, it has computers, secondly, a database, and thirdly, since it is the data processing laboratory of the CAPG [expansion unknown], it engages in working out methods, algorithms, and packages of specialized geophysical programs.

In preparing this collection, we hoped that it will better display the possibilities of the World Data Center than the center

*Numbers in the margin indicate pagination in the foreign text.

catalogs and advertising brochures. Additionally, all the data used in the studies, just like the packages of programs, are accessible to broad classes of users at the World Data Center in the USSR and abroad.

V.P. Golovkov

ALGORITHM FOR SPACE-TIME ANALYSIS OF DATA ON GEOMAGNETIC FIELD /44

N.V. Kulanin

Several algorithms for space-time analyses of the geomagnetic field have been published in the past decade, including some using a system of basis functions differing from a system of spherical harmonics [1], as well as algorithms of spherical harmonic analyses admitting a sequence of spherical harmonics distinct from the canonical sequence [2,3].

Given the unquestioned advantages of each of the above-mentioned algorithms, for the most part they impose on the original data requirements that become burdensome when a conversion is made to temporal integrals encompassing the ante-Gaussian epochs, where, as a rule, data of a different type (D, I, T) were quite arbitrarily (and often very unsuitably) distributed in time and space.

This study proposes an algorithm for space-time analysis imposing virtually no special requirements either on the composition of the initial data, which may be quite diverse (D, I, H, T, X, Y, Z) or on their distribution in time and space. The primary constraints figuring in the specific realization of the algorithm on a computer stem exclusively from the limited possibilities of the computer involved.

The algorithm uses and to a certain extent develops the ideas advanced in the studies [4,5]. The main "traditional" aspect of

the algorithm can be regarded as the use in the system of basis functions of a canonical sequence of spherical harmonics (here it is provided, as a variant, that some groups of coefficients and their time derivatives be recorded with a certain orientation toward the Jukutake method [6]).

Description of method. Underlying the algorithm is the representation of the geomagnetic field potential on the spherical surface of the Earth with radius $R_з$ at the point (θ, λ) at the instant of time t (by limitation to internal sources) in the form of a sum of the series [7]

$$U(\theta,\lambda,t)=R_з\sum_{n=1}^{n_m}\sum_{m=0}^{n}\left(g_n^m(t)\cos m\lambda+h_n^m(t)\sin m\lambda\right)P_n^m(\cos\theta) \tag{1}$$

supplemented by the representation of the secular variation of the coefficients in the neighborhood of the central epoch /45

$$C_n^m(t)=C_n^m(t_0)+\sum_{s=1}^{s_m}\left(C_n^m\right)^{(s)}_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^s}{s!} \tag{2}$$

where $C_n^m(t)-g_n^m(t)$ и $h_n^m(t)$, $(C_n^m)_{t=t_0}$

is the S-th derivative $C_n^m(t)$ in time at the point $t = t_0$.

Based on Eqs. (1) and (2), the expression for the components of the geomagnetic field intensity can be written in the form

$$E=\sum_{k=1}^{K_m} d_k G_k^{(E)}(\theta,\lambda,t-t_0), \tag{3}$$

where $E-X-$, $Y-$ or Z is the intensity component,

$G_k^E(\theta,\lambda,t-t_0)$ is the corresponding basis space-time function, the k-th in the canonical sequence,

$$G_k^E=\varphi_{nm}^{(E)}(\theta,\lambda)\Psi_s(t-t_0)\ \left(\varphi_{nm}^{(X)}=\frac{1}{(2n+1)\sin\theta}\left[n\sqrt{(n+1)^2-m^2}\,P_{n+1}^m(\cos\theta)-(n+1)\sqrt{n^2-m^2}\,P_{n-1}^m(\cos\theta)\right],\ \varphi_{nm}^{(Y)}=mP_n^m(\cos\theta)/\sin\theta,\ \varphi_{nm}^{(Z)}=-(n+1)P_n^m(\cos\theta)\right),\ \left(\Psi_s=\frac{(t-t_0)^s}{s!}\right),$$

here the subscript K is associated with n, m and s as follows:

for

$n = 1$,	$m = 0$,	$s = 0$	– $K = 1$
1	0	1	2
...	...	...	...
1	0	s_m	$s_m + 1$
1	1	0	$s_m + 2$ (for g_1^1)
...	...	...	...
1	1	1	$s_m + 3$
1	1		$2s_m + 2$
1	1	0	$2s_m + 3$ (for h_1^1)
...	...	...	...
2	0	0	$3s_m + 4$
...	...	...	...

and $K_m = n_m(n_m + 2)(s_m + 1)$.

Thus, we turn to the linear analysis, in which it is required to determine the unknown parameters d_K^* representing the coefficients g_n^m, h_n^m and their time derivatives (both at the instant of time $t = t_0$).

In order to apply Eq. (3), all the initial data must be reduced to the form of the components X, Y or Z in accordance with the type of data; this is done by iteration, in which the (n + 1)-th step is determined by the formulas /46

$$
\begin{aligned}
Y^{(n+1)} &= \sin D' H^{(n)} \\
X^{(n+1)} &= \frac{H'}{H^{(n)}} X^{(n)} \\
Z^{(n+1)} &= \sin I' T^{(n)} \\
X^{(n+1)} &= \frac{T}{T^{(n)}} X^{(n)} \\
Z^{(n+1)} &= \frac{T'}{T^{(n)}} Z^{(n)}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

where D', H', I', T' are the results of measuring D, H, I and T, respectively, $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$, $Z^{(n)}$ – X-, Y- and Z are the components computed at the n-th iteration step, $H^{(n)} = \sqrt{(X^{(n)})^2 + (Y^{(n)})^2}$, $T^{(n)} = \sqrt{(X^{(n)})^2 + (Y^{(n)})^2 + (Z^{(n)})^2}$; here $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$, $Z^{(0)}$ are specified on the basis of (3) in accordance with the given initial values of the coefficients g_n^m, h_n^m and their time derivatives at the instant $t = t_0$.

We note that the use by T' of the fourth or fifth of the transforms (4) is determined by the value of the polar angle θ. In place of (3), we now can write

$$E_\ell' = \sum_{K=1}^{K_m} \alpha_K' G_K^{(\varepsilon)}(\varphi_\ell), \quad \ell = 1, 2, \ldots, N, \tag{5}$$

where E_ℓ' is the result of iteration (left-hand side of (4)) at the ℓ-th of the total number N of measurement points φ_ℓ, where $\varphi_\ell = (\theta_\ell, \lambda_\ell, t_\ell - t_0)$. We note that the functions $G_K^{(\varepsilon)}(\varphi)$ (which we assume, just like the variable E_ℓ', to have already been multiplied by the square roots of the measurement weightings formed on the basis of Eqs. (4)) generally speaking are nonorthogonal in the given domain (and all the more so on the set of points $\{\varphi\}$).

Eq. (5) is approximate even for a fairly large K_m, since the quantities E_ℓ' are subjected to the influence of measurement errors. Based on these data we can only approximately determine the coefficients α_K'.

One of the methods of determination is to solve the system of conditional equations

$$\sum_{K=1}^{R} \alpha_K^* G_K(\varphi_\ell) = E_\ell', \quad \ell = 1, 2, \ldots, N, R \leq N \tag{6}$$

under the condition /47

$$\sum_{\ell=1}^{N} \left[E_\ell' - \sum_{K=1}^{R} \alpha_K^* G_K(\varphi_\ell) \right]^2 = min$$

(least-squares method). The coefficients α_K^* thus obtained contain the errors $\Delta\alpha_K^* = \alpha_K - \alpha_K^*$ (where α_K are the true values of the coefficients that we introduced from considerations of convenience in manipulations (see also below Eq. (15)), whose value generally depends on the choice of the number of terms in the series in Eq. (6) -- of the quantity R.

The question suggests itself: how can one choose the optimal value of R and further, how can one refine the coefficients α_K^*

within the limits of the selected spectrum such that $|\Delta \alpha_K^*| = min$? This problem is discussed below with reference to the concepts in the study [5].

Let us turn from the system of functions $G_K(\varphi)$ to the functions $\Phi_K(\varphi)$ that are orthogonal on the given set of points $\{\varphi_e\}$, i.e., that satisfy the condition

$$\left(\Phi_K, \Phi_m\right) = \sum_{e=1}^{N} \Phi_K(\varphi_e)\Phi_m(\varphi_e) = \begin{cases} q_m, & K=m \\ 0, & K \neq m \end{cases} \tag{7}$$

Orthogonalization is carried out according to the Gram-Schmidt formulas:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\varphi) = G_1(\varphi) \\ &\Phi_2(\varphi) = \alpha_{21}\Phi_1(\varphi) + G_2(\varphi) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Phi_K(\varphi) = \sum_{p=1}^{K-1}\alpha_{Kp}\Phi_p(\varphi) + G_K(\varphi),\ K=1,2,\dots,R \end{aligned} \tag{8}$$

The coefficients of orthogonalization providing for Eq. (7) are equal to

$$\alpha_{Kp} = -\frac{(G_K, \Phi_p)}{(\Phi_p, \Phi_p)} \tag{9}$$

Single application of Eqs. (8) and (9) when solving large-scale problems (R and N are large) may not provide for the rigorous orthogonality of the function $\Phi(\varphi)$ owing to the accumulation of truncation errors.

Here we propose an iterative process of orthogonalization differing somewhat from the process given in [5], since the latter, as can be shown, requires additional correction.

The next step in the iterative process is determined by the formulas:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1^{(r)} = G_1 \\
&\Phi_K^{(r)} = \sum_{p=1}^{K-1} \alpha_{Kp}^{(r)} \Phi_p^{(r)} + S_K^{(r-1)} \\
&S_K^{(r-1)} = \sum_{p=1}^{K-1} S_p^{(r-1)} \sum_{t=1}^{r-1} \alpha_{Kp}^{(t)} + G_K \\
&S_1^{(r-1)} = G_1 \\
&\alpha_{Kp}^{(r)} = - \frac{(S_K^{(r-1)}, \Phi_p^{(r)})}{(\Phi_p^{(r)}, \Phi_p^{(r)})} \\
&S_K^{(0)} = G_K
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

We can show that the iterative process can lead to the attainment of rigorous orthogonality, namely as $\alpha_{Kp}^{(r)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

$$\Phi_K^{(r)} \to \Phi_K \quad \text{and} \quad \alpha_{Kp}^{(r)\prime} = \sum_{t=1}^{r} \alpha_{Kp}^{(t)} \to \alpha_{Kp}$$

But the question of the size of the domain of its convergence can, most likely, be solved only empirically on the basis of trial calculations for each specific case. We note only that, in addition to the excessive value of R and N, the size of the domain of convergence is unfavorably affected by the poor causality of the system of normal equations, which can be obtained on the basis of system (6).

We can now assume that we have a system of functions $\Phi_K(\varphi)$ that are orthogonal on the given set of points $\{\varphi_e\}$. Here Eqs. (6) take on the form

$$\sum_{K=1}^{R} a_K^* G_K(\varphi_e) = \sum_{K=1}^{R} a_K' \Phi_K(\varphi_e) = E_e', \quad e = 1, 2, \ldots, N, \quad R \leq N \qquad (11)$$

By expressing in (11) the functions Φ_K in terms of G_K in accordance with (8) and using the linear independence of G_K, we get

$$a_K^* = \sum_{i=K}^{R} \beta_{iK} a_i', \qquad (12)$$

where

$$\beta_{KK}=1,\ \beta_{Kp}=\sum_{m=p}^{K-1}\alpha_{Km}\beta_{mp},\ K=1,2,\ldots,R;\ p=1,2,\ldots,K-1 \tag{13}$$

We note that the values of β_{ir} do not depend on the choice of R. By multipying (11) scalarly by $\Phi_K(f)$, we find ($\bar{E}'$ is the vector $\{E_i'\}$):

$$a_K' = \frac{(\bar{E}', \Phi_K)}{\Phi_K, \Phi_K};\ K=1,2,\ldots,R \tag{14}$$

The values of a_K' are also not dependent on the choice of /49
R, although system (11) is inconsistent and the equality between E_e' and the sums $\sum_{i=1} \alpha_K' G_K(f_e)=\sum_{K=1} a_K' \Phi_K(f_e)$ is approximate.[1]

In accordance with (3), let us determine the exact (true) values of the coefficients α_K as satisfying the system of equations when there is a hypothetical expansion of the initial system of points $f_1 \div f_N$ to $f_1 \div f_N, f_{N+1}, \ldots, f_{N'}$, as $N' \to \infty$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K G_K(f_e)=E_e'-\Delta_e,\ e=1,2,\ldots,N,N+1,\ldots,N' \tag{15}$$

where Δ_e is the error of the quantity E_e' due to an error of measurement at the point f_e.

Based on data of N measurements, the following system of equations can be set up

$$\sum_{K=1}^{N} \alpha_K' G_K(f_e)=\sum_{K=1}^{N} a_K' \Phi_K(f_e)=E_e',\ e=1,2,\ldots,N \tag{16}$$

---

[1]The more or less weak derendence of β_{iK} and a_K' on R can occur as a consequence of the nonlinearity of the expression for the right-hand sides of the conditional equations (6) in terms of the functions G_K (see (4)).

By subtracting (16) from (15), we get

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta d_K' G_K(\varphi_e) = \sum_{K=N+1}^{\infty} d_K G_K(\varphi_e) + \Delta e,$$

where $\Delta d_K' = d_K' - d_K$, $\ell = 1, 2, \ldots, N$

On the other hand, from (16) it follows that

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta d_K' G_K(\varphi_e) = \sum_{K=1}^{N} \Delta a_K' \Phi_K(\varphi_e) \tag{17}$$

therefore

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta a_K' \Phi_K(\varphi_e) = \sum_{K=N+1}^{\infty} d_K G_K(\varphi_e) + \Delta_e \equiv S_e \tag{18}$$

and

$$\Delta a_K' = \frac{(\bar{S}, \Phi_K)}{(\Phi_K, \Phi_K)}, \quad K = 1, 2, \ldots, N \tag{19}$$

From (16) and (17) and referring to (8) and (13) we find

$$d_K' = \sum_{i=K}^{N} \beta_{iK} a_i', \quad \Delta d_K' = \sum_{i=K}^{N} \beta_{iK} \Delta a_i', \tag{20}$$

where the quantities $\Delta a_K'$ are determined by Eq. (19).

In most applications and, in any case, when the space-time /50
algorithm is applied to data from the ante-Gaussian epochs

$$\Delta_e \gg \sum_{K=N+1}^{\infty} d_K G_K(\varphi_e) \tag{21}$$

for the vast majority of measurement stations.

Referring to (21) in Eqs. (18) and (19) and admitting only a weak correlation between $\sum_{i=N+1}^{\infty} d_i G_i(\varphi_e)$ and $\Phi_K(\varphi_e)$, we find

$$\delta_{a_K'} = \frac{\delta}{\sqrt{(\Phi_K, \Phi_K)}}, \tag{22}$$

in any case, for $K \ll N$,
where δ and $\delta a_K'$ are the root-mean-square errors of the quantities E_e' and a_K'. We note that δ does not depend on ℓ, since the weightings of the measurements were allowed for, as assumed, in the quantities [symbols not given in text].

Let us elucidate how the errors of the coefficients at the functions $G_K(\varphi)$ change if we convert from system (16) to the system of conditional equations

$$\sum_{K=1}^{R} d_K^* G_K(\varphi_e) = \sum_{K=1}^{R} a_K' \Phi_K(\varphi_e) = E_e, \quad \ell = 1, 2, \ldots, N, \quad R < N \tag{23}$$

According to (12) and (20)

$$d_K' - d_K^* = \sum_{i=R+1}^{N} \beta_{iK} a_i'$$

Hence, from (20) it then follows that

$$\Delta d_K^* = d_K^* - d_K = d_K^* - d_K' + \Delta d_K' = -\sum_{i=R+1}^{N} \beta_{iK} a_i' + \sum_{i=K}^{N} \beta_{iK} \Delta a_i'$$

or

$$\Delta d_K^* = \sum_{i=K}^{R} \beta_{iK} \Delta a_i' - \sum_{i=R+1}^{N} \beta_{iK} a_i \tag{24}$$

where $a_i = a_i' - \Delta a_K'$. From (7), (19), and (21) it follows that

$$M[\Delta a_i \Delta a_K'] = 0 \; (i \neq K); \; M[a_i' \Delta a_K'] = 0 \tag{25}$$

where $M[x]$ is the mathematical expectation of x, and (24) in place of (25) leads to

$$M[(\Delta d_K^*)^2] = \sum_{i=K}^{R} \beta_{iK}^2 \delta_{a_i}^2 + \left(\sum_{i=R+1}^{N} \beta_{iK} a_i\right)^2 \tag{26}$$

From this it follows that in order for the quantity $M[(\Delta d_K^*)^2]$ to become smaller in the transition from R to $R+1$, it is necessary and sufficient that the inequality

$$\beta^2_{k+1,k}\,\delta^2_{a'_{k+1}} < \beta_{k+1,k}\,a_{k+1}\left(\beta_{k+1,k}\,a_{k+1} + 2\sum_{i\neq k+1}^{N}\beta_{ik}\,a_i\right) \tag{27}$$

be satisfied.

In the first approximation we assume that the quantity $\sum_{i\neq k+1}^{N}\beta_{ik}\,a_i$ when there is a change in k undergoes random fluctuations about the mean value equal to zero. Then the requirement of a decrease, on the average, in the quantity $M[(\Delta\,\alpha^*_k)^2]$ when there is an increase in k leads to the condition /51

$$\left|\frac{\delta a'_{k+1}}{a_{k+1}}\right| < 1 \tag{28}$$

We will assume the quantity a_{k+1} to be "random" with respect to the fixed quantity a'_{k+1}, i.e., we assume that

$$M[a_{k+1}] = a'_{k+1},\quad D[a_{k+1}] = \delta^2_{a'_{k+1}}$$

Thus, Eqs. (19) and (21) allow us to consider the "distribution" of the quantity a_{k+1} to be norm (here we assume that N is large enough); from (28) it follows that

$$\frac{\delta a'_{k+1}}{|a'_{k+1}|} < S = S(p)$$

where p is the minimum admissible probability of inequality (28) being satisfied, and S is determined from the equation

$$\Phi^*\left(\frac{1+S}{S}\right) - \Phi^*\left(\frac{1-S}{S}\right) = 1-p$$

where $\Phi^*(x)$ is an integral error function.

Thus, for example, $S(0,93) = 0,4$, $S(0,85) = 0,5$.

In contrast to the study [5], by solving the problem of minimization $M[(\Delta \alpha_K^*)^2]$, we provide for the second approximation.

Here we assume

$$S = \sum_{i=k+2}^{N} \beta_{iK} a_i = \sum_{i=k+2}^{k_m} \beta_{iK} a_i ; \quad \sigma_S = \sqrt{\sum_{i=k+2}^{k_m} \beta_{iK}^2 \sigma_{a_i}^2}$$

where k_m is the largest value of k for which inequality (28) is still valid. We also introduce the notation:

$$z = z_K^{(k)} = \beta_{k+1,K} a_{k+1}, \quad z' = z_K^{(k)\prime} = \beta_{k+1,K} a'_{k+1}$$
$$\sigma_z = |\beta_{k+1,K}| \sigma_{a'_{k+1}} ; \quad S' = \sum_{i=k+2}^{k_m} \beta_{iK} a_i'$$

Then inequality (27) can be written in the form

$$z^2 + 2Sz - \sigma_z^2 > 0 \tag{29}$$

By solving the corresponding quadratic equation, we determine

$$z_{1,2} = -S \pm \sqrt{S^2 + \sigma_z^2} \tag{30}$$

Analogously to the solution of inequality (28), we assume /52 the quantities z' and S' to be fixed, and [symbol not given] and [symbol not given] to be random, such that

$$M[z] = z', M[S] = S', D[z] = \sigma_z^2, D[S] = \sigma_S^2 \tag{31}$$

Thus, the solution of inequality (29) can be reduced to estimating the probability of the random variable z entering the domain outside the random interval (z_1, z_2). We note that z and S --as linear functions of the coefficients a_j,-- are normally distributed and at the same time are uncorrelated, since they

contain the coefficients a_j with different subscripts, leading to the conclusion that z and S are independent. By applying the theorems of addition and multiplication of probabilities [8] and with reference to (30) and (31), let us find the desired probability in the form

$$\psi = \psi_K^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta_z}\left\{\int_{-\infty}^{0} \Phi^*\left(\frac{\frac{\delta_z^2 - x^2}{2x} - S'}{\delta_s}\right) e^{-\frac{(x-z')^2}{2\delta_z^2}} dx + \int_{0}^{\infty}\left[1 - \Phi^*\left(\frac{\frac{\delta_z^2 - x^2}{2x} - S'}{\delta_s}\right)\right] e^{-\frac{(x-z')^2}{2\delta_z^2}} dx\right\} \tag{32}$$

As a result, by referring to (12) and (25), we get the values of the coefficients d_K^* refined in the sense of an approximation to d_K:

$$d^*_{K\,\text{уточн.}} = \sum_{i=K}^{R_m} c_{iK}\beta_{iK} a_i', \tag{33}$$

[subscript in left-hand side reads "refined"]

and also

$$\delta d^*_{K\,\text{уточн.}} = \sqrt{\sum_{i=K}^{R_m} c_{iK}^2 \beta_{iK}^2 \sigma_{a'i}^2},$$

where

$$c_{iK} = \begin{cases} 1 & \text{when } K \leq K_{\text{гр}} \text{ or when } \psi_K^{(i)} \geq \chi \\ 0 & \text{in the remaining cases} \end{cases}$$

Here $K_{\text{гр}}$ is the boundary value of the subscript K determining the transition to the optimization regime defined by Eqs. (32), (33), is the minimum probability that inequality (29) will be satisfied. Since the refinement of d_K^* was carried out successively $R_m - K$ times (but not more than $R_m - K_{\text{гр}}$ times), i.e., repeatedly, it is best to set $\chi \approx 0{,}5$.

We note that by forming $d^*_{K\,\text{уточн.}}$ with the aid of the algorithm, by using Eqs. (12) and (13) we actually replace $d^*_{K\,\text{уточн.}}$ with the d_K^* in Eq. (12), which means that in the transition across the

value of $\dot{i}$ (Eq. (33) from $c_{i\kappa} = 0$ a replacement in Eq. (12) of the form $(d_\kappa^*)_i \to (d_\kappa^*)_i - \beta_{i\kappa} a_i'$, which ultimately requires the substitution in Eq. (32) of the form $S' \to S' - \beta_{i\kappa} a_i'$. /53

The possibilities of the procedure of refining the coefficients d_κ^* determined by Eqs. (32) and (33) are now being investigated with test models.

Thus, on a model utilizing the quasiuniform filling of the surface of a sphere with "measurement stations" with the superimposition on the data synthesized at these stations, pertaining to the same epoch (1965), of the error typical of the measurements in the 16th through 18th centuries, we obtained K_{cp} = 25 when R_m = 35.

Let us briefly describe the order of execution of the algorithm: orthogonalization (including repeated); iteration in accordance with Eqs. (4); computation of the coefficients a_κ and of their errors; determination of R_m; when $\bar{R}_m > R$ (where R is the last overestimation of the possible length of the series (3)); expansion of the list of basis functions and repetition of the preceding steps; selection of the initial data in accordance with the ratio of nonclosure to the root-mean-square error; and repetition of the preceding steps (singly); and finding $\{d^*_{\kappa\ \text{уточн.}}\}$.

The algorithm described, calculated for the execution of the space-time analysis of large volumes of diverse data quite arbitrarily distributed on the surface of the Earth and in time and realized in the form of a program for the BESM-6 computer, is now at the stage of completion of the verification of its applicability for analyzing a large part of the data contained in the Veynberg catalog [9] with the involvement of some independent results pertaining both to epochs earlier than those contained in this catalog and later epochs, in the [illegible] century.

In addition, the algorithm has been applied to an analysis of paleomagnetic data of the Bryunes epoch [10].

In conclusion, the author expresses his gratitude to N.P. Ben'kova, V.P. Golovkov, and T.N. Cherevko for valuable comments and discussion.

The author is also indebtedness to S.I. Braginskiy, under whose supervision he began developing the algorithm described above.

REFERENCES

1. Pushkov, A.N., E.B. Faynberg, M.V. Fiskin, and T.A. Chernova, "Space-time analysis of main geomagnetic field by method of decomposition into natural components," In the collection: Prostranstvenno-vremennaya struktura geomagnitnogo polya [Space-Time Structure of Geomagnetic Field], Moscow, Nauka, 1976.

2. Bazarzhanov, A.D. and G.I. Kolomiytseva, "Improvement in the analytic representation of the secular variation," Geomagnetizm i aeronomiya 7/5, 868 (1967).

3. Kolomiytseva, G.I. and A.N. Pushkov, "Analytic model of main geomagnetic field for an interval of 2000 years," in the collection: Prostranstvenno-vremennaya struktura geomagnitnogo polya, Moscow, Nauka, 1976.

4. Cain, J.C., W.E. Daniels, S.J. Hendricks, and D.C. Jensen, "An evaluation of the main geomagnetic field, 1940-1962," J. Geophys. Res. 70/15, (1965).

5. Mishin, V.M. and A.D. Bazarzhanov, "Selection of spectrum of Legendre polynomials approximating the observed [text missing] -field," in the collection: Geomagnitnyye issledovaniya [Geomagnetic Studies], Moscow, Nauka, No. 8, 1966.

6. Jukutake, T., "Spherical harmonic analysis of the Earth's magnetic field for the 17-th and 18-th centuries," J. of Geom. and Geoelectr. 23/1, 11 (1971).

7. Yanovskiy, B.M., Zemnoy magnetizm [Terrestrial Magnetism], Leningrad, Izdatel'stvo Leningrad State University, 1, 86 (1964).

8. Ventsel', Ye.S., Teoriya veroyatnostey [Probability Theory], Moscow, Nauka, p. 37, 1969.

9. Veynberg, B.P. and V.P. Shibayev, "Catalog of results of magnetic determinations on the globe from 1520 to 1940," Seriya rukopisnykh trudov In-ta zemnogo magnetizma [Series of Manuscript Works of the Institute of Terrestrial Magnetism], Leningrad, 1941, Issue 5, Vols. 1-3 (with rights of manuscript).

10. Ben'kova, N.P., V.P. Golovkov, N.V. Kulanin, and T.N. Cherevko, "Analytic models of the geomagnetic field in the Bryunes epoch," in present collection.

МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ КОМИТЕТ GSFC-04 (85)
ПРИ ПРЕЗИДИУМЕ АН СССР

ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR
SOVIET GEOPHYSICAL COMMITTEE

МАТЕРИАЛЫ МИРОВОГО ЦЕНТРА ДАННЫХ Б

АЛГОРИТМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В МЦД

Москва 1978

Soviet Geophysical Committee

of the Academy of Sciences of the USSR

Materials of the World Data Center B

Algorithms and Results

of Data Interpretation in WDC

Moscow 1978

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

В настоящий сборник вошли научные и методические работы по различным геофизическим дисциплинам, выполненные в рамках создаваемой в МЦД Б автоматизированной системы обработки данных планетарной геофизики (АСОДПГ). При этом, подбор статей, помимо их чисто научно-методического интереса, ставил своей целью дать читателям представление о характере данных в машиночитаемой форме и алгоритмах и программах компиляционной обработки этих данных, входящих в АСОДПГ. Мы надеемся, что сборник будет представлять интерес для широкого круга геофизиков.

Ответственные редакторы
доктор физико-математических наук
В.П.Головков
кандидат физико-математических наук
Ю.С.Тюпкин

8607

The present collection contains papers on scientific and methodological problems in different geophysical disciplines; the work was done within the program of creating an automatized system of processing of data on planetary geophysics (ASPDPG) at the World Data Center B. The papers also give descriptions of data in machine-readable form and of algorithms and programs for compilative processing of data included in ASPDPG. The papers are addressed to a wide community of geophysicists.

Editors-in-Chief:

V.P.Golovkov, Dr. Sc.

Yu.S. Tiupkin, Cand. Sc.

Предисловие

Широкое использование ЭВМ в геофизике открыло перед исследователями две возможности: построение сложных теоретических моделей, с одной стороны, и обработки больших массивов данных, с другой. Первая из этих возможностей опередила вторую по реализации в связи с тем, что подготовка данных и ввод их в ЭВМ до настоящего времени остается узким местом в общей системе, где измерительные устройства имеют морально устаревший аналоговый вывод информации. Предлагаемый сборник статей содержит результаты работ как методического, так и интерпретационного планов, так или иначе связанных с обработкой больших массивов геофизических данных самого разнообразного профиля. При всей узости задач, решаемых в каждой работе, они в целом в какой-то степени иллюстрируют возможности, которые появляются у исследователя, когда в его руках объединены и большие массивы данных в машиночитаемой форме и ЭВМ с достаточно развитым стандартным или специальным матобеспечением.

Естественно, что такие возможности возникают в первую очередь в Мировом центре данных, который, во-первых, имеет ЭВМ, во-вторых, базу данных, и в-третьих, будучи лабораторией КАПГ по обработке данных, ведет разработки методик, алгоритмов и пакетов специальных геофизических программ.

Готовя этот сборник, мы надеялись, что он в лучшей степени покажет возможности Мирового центра данных, чем каталоги центра и рекламные брошюры. Тем более, что все данные, использовавшиеся в работах, равно как и пакеты программ, доступны широким кругам пользователей МЦД в СССР и за рубежом.

В.П.Головков.

Н.В.Куланин

АЛГОРИТМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ О ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В последнее десятилетие опубликован ряд алгоритмов пространственно-временных анализов (ПВА) геомагнитного поля, в том числе использующих систему базисных функций, отличную от системы сферических гармоник [I], а также алгоритмы сферических гармонических анализов, допускающих последовательность сферических гармоник, отличную от канонической [2,3].

При несомненных достоинствах каждого из упомянутых алгоритмов, в большинстве своем они предъявляют к исходным данным требования, становящиеся обременительными при обращении к временным интегралам, захватывающим догауссовы эпохи где, как правило, данные разного типа (D, I, T) достаточно произвольным (а часто весьма неблагоприятным) образом распределены во времени и пространстве.

В настоящей работе предлагается алгоритм ПВА, практически не предъявляющий каких-либо специальных требований ни к составу исходных данных, который может быть достаточно многообразным (D, I, H, T, X, Y, Z), ни к их распределению во времени и в пространстве. Основные ограничения, фигурирующие в конкретной реализации алгоритма на ЭВМ, обусловлены исключительно ограниченными возможностями соответствующей вычислительной машины.

Алгоритм использует и в определенной степени развивает идеи, выдвинутые в работах [4, 5]. Основным "традиционным" моментом алгоритма можно считать использование в системе базисных функций канонической последовательности сферических гармоник (при этом предусмотрена, как вариант, фиксация некоторых групп коэффициентов и их производных по времени о определенной ориентацией на методику Икутаке [6]).

<u>Описание метода</u>. В основании алгоритма лежит представление потенциала геомагнитного поля на сферической поверхности Земли радиуса $R_з$ в точке (θ, λ) в момент времени t (ограничивалось внутренними источниками) в виде суммы ряда [7]

$$U(\theta,\lambda,t)=R_з\sum_{n=1}^{nm}\sum_{m=0}^{n}\left(g_n^m(t)\cos m\lambda+h_n^m(t)\sin m\lambda\right)P_n^m(\cos\theta) \quad (I)$$

дополненное представлением векового хода коэффициентов в окрестности центральной эпохи

$$C_n^m(t)=C_n^m(t_0)+\sum_{s=1}^{S_m}\left(C_n^m\right)^{(s)}_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^s}{s!} \quad (2)$$

где $C_n^m(t)-g_n^m(t)$ и $h_n^m(t)$, $(C_n^m)^{(s)}_{t=t_0}$ - s-я производная $C_n^m(t)$ по времени в точке $t=t_0$.

На основании формул (I) и (2) выражение для компонент напряженности геомагнитного поля записывается в виде

$$E=\sum_{k=1}^{K_m} d_k\, G_k^{(E)}(\theta,\lambda,t-t_0), \quad (3)$$

где $E-X-$, $Y-$ или Z - компонента напряженности, $G_k^E(\theta,\lambda,t-t_0)$ - соответствующая базисная пространственно-временная функция, к-я в канонической последовательности,

$$G_k^E=\varphi_{nm}^{(E)}(\theta,\lambda)\,\Psi_s(t-t_0)\ \left(\varphi_{nm}^{(x)}=\frac{1}{(2n+1)\sin\theta}\left[n\sqrt{(n+1)^2-m^2}\,P_{n+1}^m(\cos\theta)-(n+1)\sqrt{n^2-m^2}\,P_{n-1}^m(\cos\theta)\right],\ \varphi_{nm}^{(y)}=mP_n^m(\cos\theta)/\sin\theta,\right.$$
$$\left.\varphi_{nm}^{(z)}=-(n+1)P_n^m(\cos\theta),\ \left(\Psi_s=\frac{(t-t_0)^s}{s!}\right)\right),$$

при этом индекс K связан с n, m и s следующим образом:

	n	m	s		K
для	n = I,	m = 0,	s = 0	–	K = I
	I	0	I		2
	. . . .	. . . .	. . . .		. . . .
	I	0	S_m		S_m + I
	I	I	0		S_m + 2 (при g_1^1)
	I	I	I		S_m + 3
	. . . .	. . . .	. . . .		. . . .
	I	I			$2S_m$ + 2
	I	I	0		$2S_m$ + 3 (при h_1^1)
	. . . .	. . . .	. . . .		. . . .
	2	0	0		$3S_m$ + 4
	. . . .	. . . .	. . . .		. . . .

и $K_m = n_m(n_m+2)(S_m+I)$.

Таким образом, мы переходим к линейному анализу, в котором требуется определять неизвестные параметры d_k^*, представляющие коэффициенты g_n^m, h_n^m и их производные по времени (те и другие в момент времени $t=t_0$).

Чтобы воспользоваться формулой (3), все исходные данные

8607

необходимо привести к форме компонент X, Y или Z в соответствии с типом данных, что осуществляется путем итерации, в которой (n + I) -й шаг определяется формулами

$$\begin{aligned} Y^{(n+1)} &= \sin D' H^{(n)} \\ X^{(n+1)} &= \frac{H'}{H^{(n)}} X^{(n)} \\ Z^{(n+1)} &= \sin I' T^{(n)} \\ X^{(n+1)} &= \frac{T}{T^{(n)}} X^{(n)} \\ Z^{(n+1)} &= \frac{T'}{T^{(n)}} Z^{(n)} \end{aligned} \qquad (4)$$

где D', H', I', T' - результаты измерения D, H, I и T соответственно, $X^{(n)}, Y^{(n)}, Z^{(n)}$ - X-, Y- и Z - компоненты, вычисленные на n -м шаге итерации, $H^{(n)}=\sqrt{(X^{(n)})^2+(Y^{(n)})^2}$, $T^{(n)}=\sqrt{(X^{(n)})^2+(Y^{(n)})^2+(Z^{(n)})^2}$, при этом $X^{(o)}, Y^{(o)}, Z^{(o)}$ задаются на основании (3) в соответствии с заданными начальными значениями коэффициентов g_n^m, h_n^m и их производных по времени в момент $t=t_o$.

Заметим, что применение к T' четвертого или пятого из преобразований (4) определяется значением полярного угла θ. Вместо (3), теперь мы можем записать

$$E'_\ell = \sum_{K=1}^{K_m} d'_K G_K^{(\ell)}(\varphi_\ell), \quad \ell = 1, 2, \ldots, N, \qquad (5)$$

где E'_ℓ - результат итерации (левая часть (4)) в ℓ-м из общего числа N пунктов измерений φ_ℓ, где $\varphi_\ell = (\theta_\ell, \lambda_\ell, t_\ell - t_o)$. Отметим, что функции $G_K^{(\ell)}(\varphi)$ (которые мы считаем так же, как и величины E'_ℓ, уже помноженными на квадратные корни из весов измерений. сформированных на основании формул (4)), вообще говоря, неортогональны в заданной области (и тем более на множестве точек $\{\varphi\}$).

Равенство (5) является приближенным даже при достаточно большом K_m, так как величины E'_ℓ подвержены влиянию погрешности измерений. По таким данным можно лишь приближенно определить коэффициенты d'_K.

Один из способов определения - решение системы условных уравнений

$$\sum_{K=1}^{R} d_K^* G_K(\varphi_\ell) = E'_\ell, \quad \ell = 1, 2, \ldots, N, \; R \le N \qquad (6)$$

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

при условии

$$\sum_{\ell=1}^{N} \left[E'_\ell - \sum_{K=1}^{R} d_K^* G_K(\varphi_\ell)\right]^2 = min$$

(метод наименьших квадратов). Получаемые таким путем коэффициенты d_K^* содержат погрешности $\Delta d_K^* = d_K - d_K^*$ (где d_K - истинные значения коэффициентов, вводимые нами из соображений удобства выкладок, (см. также ниже формулу (I5)), величина которых зависит, вообще говоря, от выбора количества членов ряда в уравнении (6) - величины R.

Возникает вопрос: как выбрать оптимальное значение R и далее, как уточнять коэффициенты d_K^* в пределах выбранного спектра так, чтобы $|\Delta d_K^*| = min$? Эта задача рассматривается ниже в соответствии с идеями работы [5].

Перейдем от системы функций $G_K(\varphi)$ к функциям $\Phi_K(\varphi)$, ортогональным на заданном множестве точек $\{\varphi_\ell\}$, т.е. удовлетворяющим условию

$$(\Phi_K, \Phi_m) = \sum_{\ell=1}^{N} \Phi_K(\varphi_\ell)\Phi_m(\varphi_\ell) = \begin{cases} g_m, & K=m \\ 0, & K \ne m \end{cases} \qquad (7)$$

Ортогонализация осуществляется по формулам Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi) &= G_1(\varphi) \\ \Phi_2(\varphi) &= \alpha_{21}\Phi_1(\varphi) + G_2(\varphi) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_K(\varphi) &= \sum_{p=1}^{K-1} \alpha_{Kp}\Phi_p(\varphi) + G_K(\varphi), \quad K=1,2,\ldots,R \end{aligned} \qquad (8)$$

Коэффициенты ортогонализации, обеспечивающие (7), равны

$$\alpha_{Kp} = -\frac{(G_K, \Phi_p)}{(\Phi_p, \Phi_p)} \qquad (9)$$

Однократное применение формул (8) и (9) при решении крупномасштабных задач (R и N велики) может не обеспечивать строгой ортогональности функции $\Phi(\varphi)$ из-за накопления ошибок округления.

Здесь мы предложим итерационный процесс ортогонализации, несколько отличающийся от приведенного в работе [5], так как последний, как можно показать, требует дополнительной коррекции.

Очередной шаг в итерационном процессе определяется формулами:

$$\Phi_1^{(r)} = G_1$$
$$\Phi_K^{(r)} = \sum_{p=1}^{K-1} \alpha_{Kp}^{(r)} \Phi_p^{(r)} + S_K^{(r-1)}$$
$$S_K^{(r-1)} = \sum_{p=1}^{K-1} S_p^{(r-1)} \sum_{t=1}^{r-1} \alpha_{Kp}^{(t)} + G_K \qquad (10)$$
$$S_1^{(r-1)} = G_1$$
$$\alpha_{Kp}^{(r)} = -\frac{(S_K^{(r-1)}, \Phi_p^{(r)})}{(\Phi_p^{(r)}, \Phi_p^{(r)})}$$
$$S_K^{(0)} = G_K$$

Можно показать, что описанный итерационный процесс может привести к достижению строгой ортогональности, а именно при $\alpha_{Kp}^{(r)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

$$\Phi_K^{(r)} \to \Phi_K \quad \text{и} \quad \alpha_{Kp}^{(r)'} = \sum_{t=1}^{r} \alpha_{Kp}^{(t)} \to \alpha_{Kp}$$

Вопрос же о размере области его сходимости можно, вероятнее всего, решать лишь эмпирически на основании пробных расчетов для каждого конкретного случая. Отметим лишь, что, кроме чрезмерной величины R и N, на размер области сходимости неблагоприятно влияет плохая обусловленность системы нормальных уравнений, которую можно получить на основании системы (6).

Теперь мы можем считать, что располагаем системой функций $\Phi_K(\xi)$, ортогональных на данной совокупности точек $\{\xi_e\}$. При этом уравнения (6) принимают вид

$$\sum_{K=1}^{R} d_K^* G_K(\xi_e) = \sum_{K=1}^{R} a_K' \Phi_K(\xi_e) = E_e', \quad \ell = 1,2,\dots,N, \; R \le N \qquad (11)$$

Выражая в (11) функции Φ_K через G_K в соответствии с (8) и используя линейную независимость G_K, получаем

$$d_K^* = \sum_{i=K}^{R} \beta_{iK} a_i', \qquad (12)$$

где

$$\beta_{KK} = 1, \; \beta_{Kp} = \sum_{m=p}^{K-1} \alpha_{Km} \beta_{mp}, \; K = 1,2,\dots,R; \; p = 1,2,\dots,K-1 \qquad (13)$$

Отметим, что значения β_{iK} не зависят от выбора R. Умножая (11) скалярно на $\Phi_K(\xi)$, находим ($\bar{E}'$ – вектор $\{E_e'\}$):

$$a_K' = \frac{(\bar{E}', \Phi_K)}{(\Phi_K, \Phi_K)}; \; K = 1,2,\dots,R \qquad (14)$$

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

8607

Значения a_K' также не зависят от выбора R, хотя система (11) несовместна и равенство между E_e' и суммами $\sum_{K=1} d_K G_K(\xi_e) = \sum_{K=1} a_K' \Phi_K(\xi_e)$ является приближенным.x/

В соответствии с (3) определим точные (истинные) значения коэффициентов d_K как удовлетворяющие системе уравнений при гипотетическом расширении исходной системы точек $\xi_1 \div \xi_N$ до $\xi_1 \div \xi_N, \xi_{N+1}, \dots, \xi_{N'}$, при $N' \to \infty$

$$\sum_{K=1}^{\infty} d_K G_K(\xi_e) = E_e' - \Delta_e, \quad \ell = 1,2,\dots,N, N+1,\dots,N' \qquad (15)$$

где Δe – погрешность величины E_e' за счет погрешности измерения в точке ξ_e.

По данным N измерений может быть составлена система уравнений

$$\sum_{K=1}^{N} d_K' G_K(\xi_e) = \sum_{K=1}^{N} a_K' \Phi_K(\xi_e) = E_e', \quad \ell = 1,2,\dots,N \qquad (16)$$

Вычитая (16) из (15), получаем

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta d_K' G_K(\xi_e) = \sum_{K=N+1}^{\infty} d_K G_K(\xi_e) + \Delta e,$$

где $\Delta d_K' = d_K' - d_K, \; \ell = 1,2,\dots,N$

С другой стороны, из (16) следует

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta d_K' G_K(\xi_e) = \sum_{K=1}^{N} \Delta a_K' \Phi_K(\xi_e) \qquad (17)$$

поэтому

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta a_K' \Phi_K(\xi_e) = \sum_{K=N+1}^{\infty} d_K G_K(\xi_e) + \Delta_e \equiv S_e \qquad (18)$$

и

$$\Delta a_K' = \frac{(\bar{S}, \Phi_K)}{(\Phi_K, \Phi_K)}, \quad K = 1,2,\dots,N \qquad (19)$$

Из (16) и (17), учитывая (8) и (13), находим

$$d_K' = \sum_{i=K}^{N} \beta_{iK} a_i', \quad \Delta d_K' = \sum_{i=K}^{N} \beta_{iK} \Delta a_i', \qquad (20)$$

где величины $\Delta a_K'$ определяются формулой (19).

---

x/ Более или менее слабая зависимость β_{iK} и a_K' от R может возникнуть как следствие нелинейности выражения правых частей условных уравнений (6) через функции G_K (см. (4)).

В большинстве приложений и, во всяком случае, при применении ПВА к данным догауссовых эпох

$$\Delta_e \gg \sum_{k=N+1}^{\infty} d_k G_k(\varphi_e) \tag{21}$$

для подавляющего большинства пунктов измерений.

Учитывая (21) в (18) и (19) и допуская лишь слабую корреляцию между $\sum_{i=N+1}^{\infty} d_i G_i(\varphi_e)$ и $\Phi_k(\varphi_e)$, находим

$$\delta_{a'_k} = \frac{\delta}{\sqrt{(\Phi_k, \Phi_k)}} \tag{22}$$

во всяком случае, для $K \ll N$,

где δ и $\delta_{a'_k}$ – средние квадратичные погрешности величин E'_e и a'_k. Отметим, что δ не зависит от ℓ , так как в величинах , как предполагается, учтены веса измерений.

Выясним, как изменятся погрешности коэффициентов при функциях $G_k(\varphi)$, если от системы (16) перейти к системе условных уравнений

$$\sum_{k=1}^{R} d_k^* G_k(\varphi_e) = \sum_{k=1}^{R} a'_k \Phi_k(\varphi_e) = E_e,\ \ell = 1,2,\dots,N,\ R<N \tag{23}$$

Согласно (12) и (20)

$$d'_k - d_k^* = \sum_{i=R+1}^{N} \beta_{ik} a'_i$$

Отсюда и из (20) следует

$$\Delta d_k^* = d_k^* - d_k = d_k^* - d'_k + \Delta d'_k = -\sum_{i=R+1}^{N} \beta_{ik} a'_i + \sum_{i=K}^{N} \beta_{ik} \Delta a'_i$$

или

$$\Delta d_k^* = \sum_{i=K}^{R} \beta_{ik} \Delta a'_i - \sum_{i=R+1}^{N} \beta_{ik} a_i \tag{24}$$

где $a_i = a'_i - \Delta a'_k$. Из (7), (19) и (21) следует

$$M[\Delta a_i \Delta a'_k] = 0\ (i \neq k);\ M[a'_i \Delta a'_k] = 0 \tag{25}$$

где $M[x]$ – математическое ожидание x , и (24) вместе с (25) приводит к

$$M[(\Delta d_k^*)^2] = \sum_{i=K}^{R} \beta_{ik}^2 \delta_{a_i}^2 + \left(\sum_{i=R+1}^{N} \beta_{ik} a_i\right)^2 \tag{26}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы величина $M[(\Delta d_k^*)^2]$ уменьшалась при переходе от R к $R+1$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\beta_{R+1,k}^2 \delta_{a'_{R+1}}^2 < \beta_{R+1,k} a_{R+1} \left(\beta_{R+1,k} a_{R+1} + 2\sum_{i=R+2}^{N} \beta_{ik} a_i\right) \tag{27}$$

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

В первом приближении примем, что величина $\sum_{i=R+2}^{N} \beta_{ik} a_i$ при изменении R испытывает случайные колебания около среднего значения, равного нулю. Тогда требование убывания в среднем величины $M[(\Delta d_k^*)^2]$ при увеличении R приводит к условию

$$\left| \frac{\delta_{a'_{R+1}}}{a_{R+1}} \right| < 1 \tag{28}$$

Величину a_{R+1} будем считать "случайной" относительно фиксированной величины a'_{R+1} , т.е. примем

$$M[a_{R+1}] = a'_{R+1},\ D[a_{R+1}] = \delta^2_{a'_{R+1}}$$

Так соотношения (19) и (21) позволяют "распределение" величины a_{R+1} считать нормальным (при этом учитываем, что N достаточно велико), из (28) следует

$$\frac{\delta_{a'_{R+1}}}{|a'_{R+1}|} < S = S(p)$$

где p – минимальная допустимая вероятность выполнения неравенства (28), а S определяется из уравнения

$$\Phi^*\left(\frac{1+S}{S}\right) - \Phi^*\left(\frac{1-S}{S}\right) = 1-p$$

где $\Phi^*(z)$ – интегральная функция ошибок.

Так, например, $S(0{,}93) = 0{,}4$, $S(0{,}85) = 0{,}5$.

В отличие от работы [5], решая задачу о минимизации $M[(\Delta d_k^*)^2]$, мы предусматриваем второе приближение.

При этом полагаем

$$S = \sum_{i=R+2}^{N} \beta_{ik} a_i = \sum_{i=R+2}^{R_m} \beta_{ik} a_i;\ \delta_S = \sqrt{\sum_{i=R+2}^{R_m} \beta_{ik}^2 \delta_{a'_i}^2}$$

где R_m – наибольшее значение R , при котором еще справедливо неравенство (28). Введем также обозначения:

$$z = z_k^{(R)} = \beta_{R+1,k} a_{R+1},\quad z' = z_k^{(R)'} = \beta_{R+1,k} a'_{R+1}$$

$$\delta_z = |\beta_{R+1,k}| \delta_{a'_{R+1}};\quad S' = \sum_{i=R+2}^{R_m} \beta_{ik} a'_i$$

Тогда неравенство (27) запишется в виде

$$z^2 + 2Sz - \delta_z^2 > 0 \tag{29}$$

Решая соответствующее квадратное уравнение, определяем

$$z_{1,2} = -S \pm \sqrt{S^2 + \delta_z^2} \tag{30}$$

7-2

8607

Аналогично решению неравенства (28), величины z' и S' считаем фиксированными, а и – случайными, такими, что

$$M[z]=z',\ M[S]=S',\ \mathcal{D}[z]=\delta_z^2,\ \mathcal{D}[S]=\delta_S^2 \qquad (31)$$

Таким образом, решение неравенства (29) сводится к оценке вероятности попадания случайной величины z в область вне случайного интервала (z_1, z_2). Отметим, что z и S в качестве линейных функций коэффициентов a_j распределены нормально и при этом некоррелированы, так как содержат коэффициенты a_j с различными индексами, что приводит к выводу о независимости z и S. Пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей [8] и учитывая (30) и (31), находим искомую вероятность в виде

$$\Psi=\Psi_K^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta_z}\left\{\int_{-\infty}^{0}\Phi^*\left(\frac{\frac{\delta_z^2-x^2}{2x}-S'}{\delta_S}\right)e^{-\frac{(x-z')^2}{2\delta_z^2}}dx+\right. \qquad (32)$$
$$\left.+\int_{0}^{\infty}\left[1-\Phi^*\left(\frac{\frac{\delta_z^2-x^2}{2x}-S'}{\delta_S}\right)\right]e^{-\frac{(x-z')^2}{2\delta_z^2}}dx\right\}$$

В итоге, учитывая (12) и (25), получим уточненные в смысле приближения к d_K значения коэффициентов d_K^*:

$$d^*_{K\,\text{уточн.}}=\sum_{i=K}^{R_m} c_{iK}\,\beta_{iK}\,a_i', \qquad (33)$$

а также

$$\delta d^*_{K\,\text{уточн.}}=\sqrt{\sum_{i=K}^{R_m} c_{iK}^2\,\beta_{iK}^2\,\delta_{a_i'}^2}$$

где

$$c_{iK}=\begin{cases}1 & \text{при } K\le K_{\varphi} \text{ либо при } \Psi_K^{(i)}\geqslant \varkappa\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

Здесь K_{φ} – граничное значение индекса K, определяющее переход к режиму оптимизации, определяемому формулами (32), (33), $\varkappa$ – минимальная вероятность выполнения неравенства (29). Так как уточнение d_K^* проводится последовательно R_m-K раз (но не более R_m-K_{φ} раз), т.е. неоднократно, целесообразно задавать $\varkappa\approx 0{,}5$.

Отметим, что, формируя $d^*_{K\,\text{уточн.}}$ с помощью алгоритма, использующего формулы (12) + (33), мы фактически заменяем d_K^* формулы (12) на $d^*_{K\,\text{уточн.}}$, что означает при переходе через значение i (формула (33)) с $c_{iK}=0$ замену в формуле (12) вида $(d_K^*)_i\to(d_K^*)_i-\beta_{iK}a_i'$, что в конечном итоге требует замены в формуле (32) вида $S'\to S'-\beta_{iK}a_i'$

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

Возможности процедуры уточнения коэффициентов d_K^*, определяемой формулами (32), (33), в настоящее время исследуются на пробных моделях.

Так, на модели, использующей квазиравномерное заполнение поверхности сферы "пунктами измерений" с наложением на синтезированные в этих пунктах данные, относящиеся к одной эпохе (1965г.), погрешности, характерной для измерений XVI-XVIII вв, получено K_{φ} = 2? при $R_m = 35$.

Кратко опишем порядок выполнения алгоритма: ортогонализация (в том числе повторная); итерация в соответствии с формулами (4); вычисление коэффициентов a_K, их погрешностей, определение R_m; при $R_m > R$ (где R – последняя избыточная оценка возможной длины ряда (3)) расширение списка базисных функций и повторение предыдущих этапов; отбор исходных данных в соответствии с отношением невязки к средней квадратичной погрешности и повторение предыдущих этапов (однократное), получение $\{d^*_{K\,\text{уточн.}}\}$.

Описанный алгоритм, рассчитанный на выполнение ПВА больших массивов разнородных данных, достаточно произвольно распределенных на поверхности Земли и во времени и реализованный в виде программы для ЭВМ БЭСМ6, находится в настоящее время в стадии завершения проверки его возможностей на анализе большей части данных, содержащихся в каталоге Вейнберга [9] с привлечением ряда независимых результатов, относящихся как к эпохам, более ранним по отношению к содержащимся в этом каталоге, так и поздним, относящимся к XI веку.

Помимо этого, алгоритм применен к анализу палеомагнитных данных эпохи Брюнеса [10].

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Н.П.Бенькововой, В.П.Головкову и Т.Н.Черевко за ценные замечания и обсуждение.

Автор также хотел бы выразить свою признательность С.И.Брагинскому, под руководством которого он начинал разработку описанного выше алгоритма.

Литература

1. Пушков А.Н., Файнберг Э.Б., Фискина М.В., Чернова Т.А. Пространственно-временной анализ главного геомагнитного поля методом разложения на естественные составляющие. В сб. "Пространственно-временная структура геомагнитного поля", М., "Наука", 1976.
2. Базарванов А.Д., Коломийцева Г.И. Улучшение аналитического представления вековой вариации. "Геомагнетизм и аэрономия", т.7, № 5, 868, 1967.
3. Коломийцева Г.И., Пушков А.Н. Аналитическая модель главного геомагнитного поля для интервала 2000 лет. В сб. "Пространственно-временная структура геомагнитного поля", М., "Наука", 1976.
4. Cain J.C., Daniels W.E., Hendricks S.J., Jensen D.C. An evaluation of the main geomagnetic field, 1940-1962. J. Geophys. Res., v. 70, No. 15, 1965.
5. Мишин В.М., Базарванов А.Д. Выбор спектра полиномов Лежандра, аппроксимирующих наблюдаемое -поле. В сб."Геомагнитные исследования", М., "Наука", № 8, 1966.
6. Jukutake T. Spherical harmonic analysis of the Earth's magnetic field for the 17-th and 18-th centuries. J. of Geom. & Geoelectr., v. 23, No. 1, 11, 1971.
7. Яновский Б.М. Земной магнетизм, Л., изд-во ЛГУ, т.I, 86, 1964.
8. Венцель Е.С. Теория вероятностей. М., "Наука", 37, 1969.
9. Вейнберг Б.П., Шибаев В.П. Каталог результатов магнитных определений на земном шаре с 1520 г. по 1940 г. Серия рукописных трудов Ин-та земного магнетизма, Л., 1941, вып.5, тт.I-3 (на правах рукописи).
10. Бенькова Н.П., Головков В.П., Куханин Н.В., Черевко Т.Н. Аналитические модели геомагнитного поля эпохи Брюнеса. В наст.сб.

В.Н.Бадковский

О МЕТОДЕ АНАЛИЗА ДАННЫХ ПО ПЕРЕХОДНЫМ ЗОНАМ ВО ВРЕМЯ ИНВЕРСИЙ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Изучение переходных режимов геомагнитного поля во время инверсий преследует две цели.

1. Установление возможности идентификации инверсии, т.е. совпадение некоторых особенностей, присущих одной и той же инверсии, зафиксированной в разных географических точках, и их различие для разновозрастных инверсий в одной точке.

2. Определение временных интервалов, характерных для этого процесса, что важно для понимания механизма генерации геомагнитного поля.

При обработке данных по переходным зонам обычно используются координаты виртуальных геомагнитных полюсов (ВГП), а изменения поля трактуются в терминах траекторий их перемещений [1, 2, 3, 4] или на основе пространственного распределения координат ВГП [5]. Координаты палеополюса однозначно вычисляются по соответствующим формулам [6], если известны значения склонения D и наклонения J вектора остаточной намагниченности I_n, а также значения широты φ и долготы λ точки отбора образца.

При этом предполагается, что геомагнитное поле является дипольным [7].

Достоверность рассчитанных координат ВГП оценивается по статистике Фишера [8], требующей выполнения условий осесимметричного распределения векторов I_n относительно истинного направления, а функция плотности распределения имеет вид: $p = c \cdot exp(K \cos \Psi)$, причем $\int_S P ds = 1$, где c – нормировочная константа, K – кучность, Ψ – угловое отклонение от среднего направления.

При анализе геомагнитного поля в течение переходных процессов во время инверсии необходимо иметь в виду, что 1) геомагнитное поле может быть и недипольным, во всяком случае, на всем протяжении переходного процесса, и 2) распределение векторов по поверхности сферы может не подчиняться распределению Фишера.

Как и при стандартных палеомагнитных исследованиях, построение ВГП по данным, полученным при анализе переходных зон,